Complexe Rekenwijze

Voor het berekenen van deel-stromen en deel-spanningen in de wisselstroomtechniek hebben wij tot dusver gebruik gemaakt van de vectoriële rekenwijze. Dat wil zeggen: met behulp van vectorenfiguren hebben we de verschillende deel-stromen en -spanningen alsmede hun onderlinge fase-hoeken vastgelegd, waarna we in staat waren de totaal-stroom resp. de totaal-spanning te berekenen.

Wanneer we met meerdere spoelen, condensatoren en weerstanden in een circuit te maken krijgen, dan wordt de toepassing van vectorenfiguren te ingewikkeld en gebruiken we liever de complexe rekenwijze. Daarover het volgende :

$\sqrt[2]{4} = \pm 2$ (spreek uit: plus of min 2)

Evenzo: $\sqrt{16} = \pm 4$; $\sqrt[3]{27} = + 3$; $\sqrt{25} = \pm 5$; $\sqrt{36} = \pm 6$; enz.

Al deze wortels kunnen dus getrokken worden, m.a.w. al deze wortelvormen zijn voor te stellen door een ander getal. Dergelijke vormen noemen wij reëel.

Daartegenover staan wortelvormen zoals $\sqrt{-4}$; $\sqrt{-9}$; $\sqrt{-36}$; enz. Dit soort wortels is niet te trekken, m.a.w. de wortelvorm is niet door een ander getal voor te stellen. Zij heten imaginair .

N.B.: $\sqrt[3]{-27} = -3$. Merk op, dat oneven machts wortels uit negatieve getallen reëel zijn.

Om met imaginaire vormen te kunnen werken ontbinden wij als volgt :

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 . -1} = \sqrt{4} . \sqrt{-1} = 2.\sqrt{-1}$$
$$\sqrt{-9} = \sqrt{9. -1} = \sqrt{9} . \sqrt{-1} = 3.\sqrt{-1}$$
$$\sqrt{-36} = \sqrt{36 . -1} = \sqrt{36} .\sqrt{-1} = 6.\sqrt{-1}$$

Merk op, dat we aldus elke imaginaire vorm kunnen schrijven als een product van twee factoren, waarvan de eerste factor reëel en de tweede factor steeds $\sqrt{-1}$ is.

Om de schrijfwijze te vereenvoudigen stellen we $\sqrt{-1} = j$, zodat

$\sqrt{-4} = 2.\sqrt{-1} = 2.j$; $\sqrt{-9} = 3\,j$; $\sqrt{-25} = 5\,j$; enz.

Moeten we imaginaire vormen bij elkaar optellen, dan gaan we als volgt te werk:

$$\sqrt{-4} + \sqrt{-9} + \sqrt{-36} =$$
$$2.j + 3.j + 6.j = 11.j$$

We behandelen de factor j dus als een normale algebraïsche factor, op dezelfde manier dus als $2.a + 3.a + 6.a = 11.a$

Aftrekken gaat op overeenkomstige wijze :

$$\sqrt{-36} - \sqrt{-16} = 6.j - 4.j = 2.j$$

Aftrekken:

1). $(6 + 10j) - (3 + 4j) = 6 + 10j - 3 - 4j = 3 + 6j$

2). $(3 + 5j) - (5 + 7j) = 3 + 5j - 5 - 7j = -2 - 2j$

Vermenigvuldigen gaat zo :

$$3 \times \sqrt{-36} = 3 \times 6.j = 18.j$$

$$5 \times \sqrt{-9} = 5 \times 3.j = 15\,j$$

$$\sqrt{-16} \times \sqrt{-25} = 4j \times 5j = 20.j^2$$

Bij deze laatste vorm bedenken we, dat $j = \sqrt{-1}$, zodat $j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$, zodat $20.j^2 = 20.-1 = -20$.

Een enkele keer krijgen we met hogere machten van j te maken, waarbij U dient te onthouden dat

$$j = \sqrt{-1}$$

$$j^2 = -1$$

$$j^3 = j^2.j = -j$$

$$j^4 = j^2.j^2 = +1$$

Vermenigvuldigen:

1). $5.(3 + 2j) = 15 + 10j$

2). $6.(-2 - 3j) = -12 - 18j$

3). $2j.(2 + 3j) = 4j + 6.j^2 = 4j - 6 = -6 + 4j$

4). $(3 + 4j).(5 + 7j) = 15 + 21j + 20j + 28\,j^2 =$
$= 15 + 41j - 28 = -13 + 41\,j$

Opgaven.

Bereken $(2 + 3j).(5 - 7j) = 10 - 14j + 15j - 21j^2 = 31 + j.$

$(3 - 4j).(6 - 5j) = -2 - 39j$

$(12 - 5j)(7 + 6j) = 114 + 37j.$

Delen is ook erg eenvoudig :

$$\frac{12\,j}{3} = 4\,j \;;\quad \frac{21j}{7} = 3j \;;\quad \frac{35j}{5} = 7j \;;$$

$$\frac{12}{3\,j} = \frac{12}{3\,j} \times \frac{-j}{-j} = \frac{-12j}{-3j^2} = \frac{-12j}{+3} = -4j$$

$$\frac{72}{-6j} = \frac{72}{-6 \cdot j} \times \frac{+j}{+j} = \frac{72\,j}{-6j^2} = \frac{72\,j}{+\,6} = 12\,j$$

$$\frac{72}{-6j} \times \frac{-j}{-j} = \frac{-72j}{6j^2} = \frac{-72j}{6j^2} = 12j$$

Delen:

1). $\dfrac{6 + 4j}{2} = \dfrac{6}{2} + \dfrac{4j}{2} = 3 + 2j$

2). $\dfrac{6}{2 + 3j} = \dfrac{6}{2 + 3j} \times \dfrac{2 - 3j}{2 - 3j} = \dfrac{12 - 18j}{(2)^2 - (3j)^2} = \dfrac{12 - 18j}{4 - 9\,j^2} =$

$$= \frac{12 - 18j}{4 + 9} = \frac{12}{13} - \frac{18}{13}\,j$$

3). $\dfrac{7}{3 - 4j} = \dfrac{7}{3 - 4j} \cdot \dfrac{3 + 4j}{3 + 4j} = \dfrac{21 + 28j}{9 - 16\,j^2} = \dfrac{21 + 28j}{9 + 16} =$

$$= \frac{21}{25} + \frac{28}{25}\,j$$

Stellen wij dit getal gelijk aan $A + jB$, dan is dus $A = \dfrac{21}{25}$ en $B = \dfrac{28}{25}$.

4). $\dfrac{5 + 7j}{4 - 3j} = \dfrac{5 + 7j}{4 - 3j} \cdot \dfrac{4 + 3j}{4 + 3j} = \dfrac{(5 + 7j)(4 + 3j)}{(4 - 3j)(4 + 3j)} =$

$$= \frac{20 + 15j + 28j + 21\,j^2}{16 + 9} = \frac{20 - 21 + 43j}{25} = -\frac{1}{25} + \frac{43}{25}\,j$$

Stellen wij dit getal gelijk aan $A + j.B$, dan is dus

$$A = -\frac{1}{25} \quad \text{en} \quad B = \frac{43}{25}$$

Machtsverheffen.

Bijvoorbeeld: $(3j)^2 = 9\,j^2 = -9$

$(-4j)^2 = 16\,j^2 = -16$

-.-.-.-.-.-

Bereken de reëele en de imaginaire term van de complexe vorm

Soms krijgen we te maken met de som danwel met het verschil van twee termen , waarvan de eerste term reëel is en de tweede term imaginair.

Bijvoorbeeld: $4 + 3j$; $5 - 2j$; $7 + 5j$; $20 - 12j$; enz.

Dergelijke twee-termen , waarvan de eerste term reëel is en de tweede imaginair , heten: complexe vormen .

In het algemeen is een complex getal dus voor te stellen door $A \pm jB$ (spreek uit: A plus of min jB) , waarbij A de reële- en B de imaginaire term is.

Het werken met complexe getallen levert geen moeilijkheden op.

Optellen:

$$(3 + 4j) + (5 + 7j) = 3 + 4j + 5 + 7j = 8 + 11j$$

Opgaven:

Bereken de reële en de imaginaire term van de complexe vorm

$$\frac{3 + 4j}{5 + 7j} \quad ; \quad \frac{2}{6 - 8j} \quad ; \quad \frac{15 - 4j}{2 - 3j} \quad .$$

$$\frac{3+4j}{5+7j} \cdot \frac{5-7j}{5-7j} = \frac{15+28-21j+20j}{25+49} = \frac{43-1j}{74} \Rightarrow A = \frac{43}{74} \quad B = -\frac{1}{74}$$

$$\frac{2}{6-8j} \cdot \frac{6+8j}{6+8j} = \frac{12+16j}{36+64} = \frac{12+16j}{100} \rightarrow A = \frac{12}{100} \quad B = \frac{16}{100}$$

$$\frac{15-4j}{2-3j} \cdot \frac{2+3j}{2+3j} = \frac{30+12+45j-8j}{4+9} = \frac{42+37j}{13} \Rightarrow A = \frac{42}{13} \quad B = \frac{37}{13}$$

De grafische voorstelling van een complex getal.

Een complex getal van de gedaante $A + j.B$ is grafisch op een assenstelsel uit te zetten. Langs de horizontale as zetten wij daartoe de reële term uit, met als eenheid 1. Langs de vertikale as zetten wij de imaginaire term uit, met als eenheid j.

Zo is in fig. 1 het complexe getal $3 + 4j$ voorgesteld door het punt P. We noemen P het <u>beeldpunt</u> van het complexe getal $3 + 4j$.

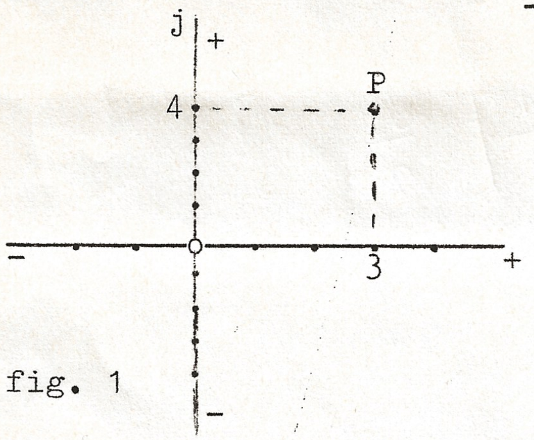


fig. 1

We kunnen zeggen:
het beeldpunt P heeft een horizontale waarde (abscis) $+3$ en een vertikale waarde (ordinaat) $+4j$.

De ligging van het punt P in het complexe vlak wordt dus bepaald door zijn co-ordinaten.

Ook kunnen wij zeggen, dat de ligging van punt P in het complexe vlak bepaald wordt door de lengte van de lijn OP en de hoek φ, in fig. 2

Stel de lijn OP voor door $\bar{z}$, dan is dus $\bar{z}$ de grafische voorstelling van het complexe getal $A + j.B$. De lengte van de lijn OP is gemakkelijk te berekenen uit $\sqrt{A^2 + B^2}$

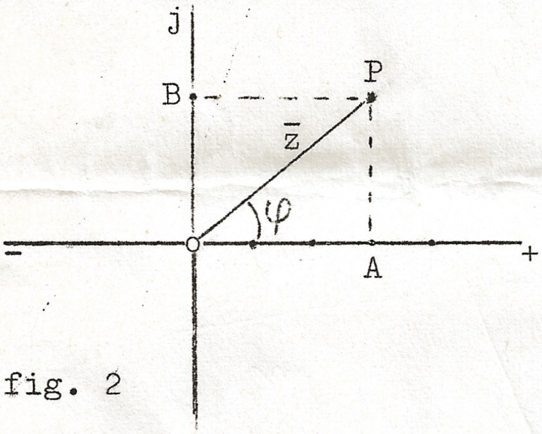


fig. 2

We noemen dit: de <u>volstrekte waarde</u> ofwel: de <u>modulus</u> van het complexe getal en stellen deze volstrekte waarde voor door $|z|$.

Wanneer dus $\bar{z} = A + j.B$, dan is

$|z| = \sqrt{A^2 + B^2}$

Zo is, in fig. 1, $\bar{z} = 3 + 4j$ en

$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

De hoek φ in fig. 2 heet: het <u>argument</u> van het complexe getal.

Deze hoek laat zich berekenen uit: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A}$

Zo is, in fig. 1, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} = 1{,}33333$. Opzoeken in de tafel geeft: $\varphi = 53^\circ\ 8'$

In het algemeen dus: de tangens van het argument is gelijk aan het aantal eenheden van de imaginaire term gedeeld door de reële term.

<u>Opgaven:</u>

1. Gegeven is het complexe getal $\bar{z} = 3 - 3j$. Construeer daarvan het beeldpunt in het complexe vlak en bereken modulus en argument. $Mod = |z| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}!$ $arg = tg\,\varphi = \frac{3}{3} = 1$
2. Doe hetzelfde met de complexe getallen $\bar{s} = 8 + 10j$ en $\bar{w} = 4 - 5j$ $|s| = \sqrt{8^2+10^2} = 2\sqrt{41}$ $Arg = \frac{10}{8} = 1{,}25$ $|w| = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$ $Arg = \frac{5}{4} = 1{,}25$
3. Bereken modulus en argument van de complexe getallen

$$\bar{z}_1 = \frac{1}{3 - 4j} \qquad \text{en} \qquad \bar{z}_2 = (2 - 3j)^2$$

-.-.-.-.-

Een complex getal kan ook worden voorgesteld door

$$\bar{z} = m.(\cos\varphi + j.\sin\varphi) \quad ,$$

waarin m = modulus .

<u>Bewijs:</u> Noem , in fig. 3 , m de lengte van de lijn OP en φ het argument. Laat $\bar{z} = A + j.B$, dan is $A = m.\cos\varphi$ en $B = m.\sin\varphi$, zodat

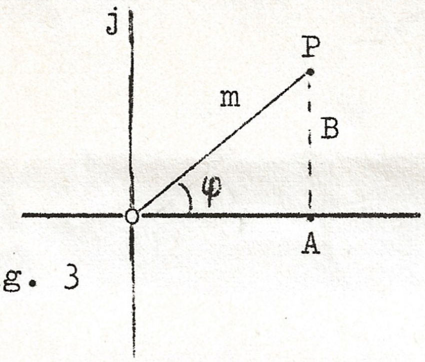


fig. 3

$$\bar{z} = m.\cos\varphi + j.m.\sin\varphi = m.(\cos\varphi + j.\sin\varphi)$$

De vorm $m(\cos\varphi + j.\sin\varphi)$ staat bekend als <u>richtingsgetal</u>.

-.-.-.-

Definities.

I. Twee complexe getallen heten toegevoegd complex , wanneer ze uitsluitend verschillen in het teken vóór de imaginaire term.

Bijv.: $2 + 3j$ en $2 - 3j$; $7 + 5j$ en $7 - 5j$

In het algemeen: $A + jB$ en $A - jB$.

Toepassing: Bereken $\dfrac{1}{3 + 4j}$

Oplossing: Om de factor j uit de noemer weg te werken vermenigvuldigen we teller en noemer van de breuk met de toegevoegd complexe vorm van de noemer.

We krijgen dan:

$$\frac{1}{3+4j} \times \frac{3-4j}{3-4j} = \frac{3-4j}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}j \quad (= A - jB)$$

Uit dit antwoord volgen nu 2 conclusies :

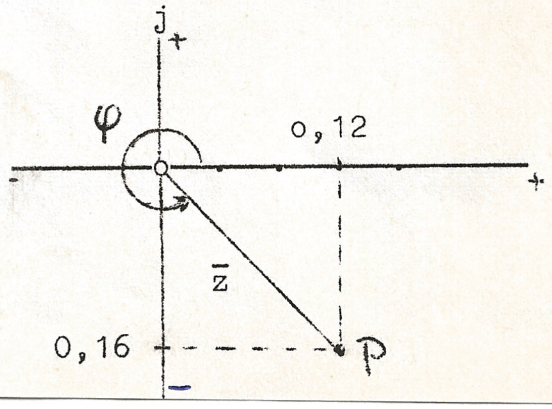
1^o. De modulus van deze complexe vorm is $m = \sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + \left(\frac{4}{25}\right)^2} = \frac{1}{5}$

2^o. Het argument φ vinden we uit $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{-4/25}{3/25} = -\dfrac{4}{3}$

Zuiver goniometrisch genomen, zijn er 2 hoeken aan te wijzen waarvan de tangens gelijk is aan $-1,33333$, n.l. een hoek in het tweede kwadrant en een hoek in het vierde kwadrant.

De grafische voorstelling van het complexe getal $\bar{z} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}j$ echter doet ons zien, dat de hoek φ in het vierde kwadrant ligt. Opzoeken in de tafel geeft

$\varphi = -53^o\ 8'$ ofwel $306^o\ 52'$



$$\bar{z}_1 = \frac{1}{3-4j} \cdot \frac{3+4j}{3+4j} = \frac{3+4j}{9+16} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}j$$

$|z_1| = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ Arg $= \frac{4}{3} = 1,333$

$\bar{z}_2 = \left(\frac{1}{2} + 3j\right)^2 = 4 - 9 - 12j = -5 - 12j$

$|z_2| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ Arg $= \frac{12}{5} = 2,4$

Def. II.

Twee complexe getallen heten tegengesteld complex , wanneer zij zowel verschillen in het teken vóór de reële term als ook in het teken vóór de imaginaire term.

Bijv. $+2+3j$ en $-2-3j$. In het algemeen dus: $A + jB$ en $-A - jB$.

In de elektronica vindt deze definitie geen toepassing.

-.-.-

Def. III.

Twee complexe getallen zijn aan elkaar gelijk, wanneer zowel de reële termen als ook de imaginaire termen aan elkaar gelijk zijn.

Wanneer dus $A + jB = P + jQ$, dan is $A = P$ en $B = Q$

Dit is voor ons een uiterst belangrijke definitie.

Voorbeeld. Gegeven is: $A + jB = 300 + 400j$

Gevraagd: Hoe groot is A en hoe groot is B ?

Antwoord: $A = 300$ en $B = 400$.

Uit Definitie III volgt:

Een complex getal $A + jB$ is reëel wanneer de imaginaire term nul is.

Is bijv. $A + jB = 1300$, dan is $A = 1300$ en $B = 0$.

We zouden immers kunnen schrijven: $A + jB = 1300 + 0.j$ en dan Def.III toepassen.

Vul nu zelf in: Een complex getal $A + jB$ is imaginair wanneer ....

Is bijv. $A + jB = -1200j$, dan is A = ... en B = ...

-.-.-

Voorbeelden.

1. Vraag : Schrijf het complexe getal $3 + 4j$ als richtingsgetal.

Antwoord: $3 + 4j = m.(\cos\varphi + j.\sin\varphi)$

Hierin is $m = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ en

$\cos\varphi = \frac{3}{5}$ en $\sin\varphi = \frac{4}{5}$, zodat

$$3 + 4j = 5.\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}j\right)$$

-.-.-

2. Vraag : Schrijf $-2 + 2j\sqrt{3}$ als richtingsgetal

Antwoord: $-2 + 2j\sqrt{3} = m.(\cos\varphi + j.\sin\varphi)$

Hierin is $m = \sqrt{4 + 12} = 4$

$\cos\varphi = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ en $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

(φ ligt in het tweede kwadrant en is gelijk aan 120°), zodat

$$-2 + 2j\sqrt{3} = 4.\left(-\tfrac{1}{2} + j.\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

-.-.-

3.

3. Bereken $\sqrt{9 + 2j\sqrt{10}}$

Antwoord: Stel $\sqrt{9 + 2j\sqrt{10}} = A + jB$. Kwadrateren geeft

$$9 + 2j\sqrt{10} = A^2 - B^2 + j2AB$$

Het eerste lid van deze vergelijking is een complexe vorm , het tweede lid eveneens . De beide complexe vormen zijn aan elkaar gelijk , dus

1°. $A^2 - B^2 = 9$ en 2°. $2j\sqrt{10} = 2jAB$

ofwel $AB = \sqrt{10}$ en

$A^2.B^2 = 10$

$$\begin{array}{lrl} 1°. & (A^2 - B^2)^2 & = 81 \\ 2°. & 4A^2B^2 & = 40 \\ \hline & (A^2 + B^2)^2 & = 121 \end{array} +$$

Worteltrekken geeft

$A^2 + B^2 = 11$ (niet -11 , daar $A^2 + B^2 > 0$ is).

Schrijf nu onder elkaar:

$$\begin{array}{rl} A^2 + B^2 & = 11 \\ A^2 - B^2 & = 9 \\ \hline \end{array} - \quad +$$

$2B^2 = 2 \rightarrow B^2 = 1 \rightarrow B = \pm 1$

$2\,A^2 = 20 \rightarrow A^2 = 10 \rightarrow A = \pm\sqrt{10}$

Dus: $\sqrt{9 + 2j\sqrt{10}} = \pm\sqrt{10} \pm 1.j$

4. Bereken $\sqrt[4]{-4}$

Antwoord: $\sqrt[4]{-4} = \sqrt{\sqrt{-4}} = \sqrt{2j} = P + jQ$

kwadrateren geeft $2j = P^2 - Q^2 + 2jPQ$

Daaruit volgt: 1°. $P^2 - Q^2 = 0$ en 2°. $P.Q = 1$

Uit 2°. volgt: $Q = \frac{1}{P}$. Dit ingevuld in 1°. geeft

$P^2 - \frac{1}{P^2} = 0$ ofwel $P^2 = \frac{1}{P^2} \rightarrow P^4 = 1$

Hieraan voldoen $P = +1$ en $P = -1$

(niet $P = j$ en $P = -j$, want P is reëel).

Dus: $\sqrt[4]{-4} = P + jQ = 1 + j$ of $-1 - j$.

-.-.-.-

Opmerking :

De formule $\sqrt{a}\,.\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ geldt bij het werken met imaginaire getallen niet !

$\sqrt{-4}\,.\sqrt{-9}$ is niet $\sqrt{-4}\,.\sqrt{-9} = \sqrt{+36}$, doch

$j.\sqrt{4}\,.\,j.\sqrt{9} = j^2.\,6 = -6$.

Evenzo: $(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1}\,.\sqrt{-1} \neq \sqrt{+1}$, doch

$j\,.\,j = j^2 = -1$.

Opgaven :

4. Herleid a. $(3.\sqrt{-1} + j.\sqrt{3})^2 + (3j - j.\sqrt{-3})^2$

b. $\{j.(\sqrt{2} - 1) + j.(j\sqrt{2} + 1)\}^2$

5. Bepaal modulus en argument van

a. $1\frac{1}{2}.(j + \sqrt{3})$

b. $\dfrac{1}{4 + j}$

6. Herleid a. $\dfrac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{5} + 2j} + \dfrac{1}{2 + j\sqrt{5}} + \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2} - j}$

b. $(3 + 4j)^{-\frac{1}{2}} + (3 - 4j)^{-\frac{1}{2}}$

7. Herleid a. $\sqrt{-j}$

b. $\sqrt{\dfrac{1 - j}{4}}$

c. $\sqrt{23 + 12j\sqrt{3}}$

8. RT A 33 ; A 73 ; A 86 ; A 106 ; A 126 ; A 149 ; A 166 ; A 174 ; A 184 ; A 211 ; A 220 .

-.-.-.-.-

Radialen :

In de vlakke meetkunde worden hoeken uitgedrukt in graden, minuten en seconden. Zo weten wij, dat een rechte hoek = 90° , een gestrekte hoek = 180° , enzovoort.

De methode voldoet in de planimetrie zeer goed , doch is overigens vrij willekeurig. Een verdeling van de rechte hoek in bijv. 100 eenheden had ook best kunnen voldoen.

In de hogere wiskunde blijkt , dat het dikwijls eenvoudiger is de grootte van een middelpuntshoek te geven als de verhouding van de lengte van een cirkelboog tot de lengte van de straal. De eenheid , waarin de grootte van de hoek dan wordt uitgedrukt , is de <u>radiaal</u>.

Wanneer dus , in fig. 1 , de lengte van de boog p q gelijk is aan de straal r , dan is middelpunts-hoek α gelijk aan 1 radiaal ,

<u>Leer van buiten:</u>

Een hoek van 1 radiaal is een middelpuntshoek waarvan de boog gelijk is aan de straal.

Evenzo: Een hoek van 2 radialen is een middelpuntshoek waarvan de boog gelijk is aan 2 maal de straal.

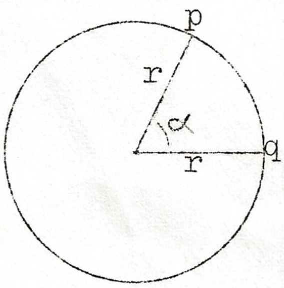


fig. 1

Vul aan: Een hoek van 3 radialen is ....

Een hoek van 5 radialen is ....

De omtrek van de hele cirkel is $2\pi.r$ Op de gehele cirkel-omtrek kunnen dus 2π stukken gelijk aan de straal worden afgepast.
De gehele cirkelomtrek komt overeen met een middelpuntshoek van 360°.
De gehele middelpuntshoek bevat dus 2π radialen.

Daaruit volgt:

$$360^\circ = 2\pi \text{ radialen}$$
$$180^\circ = \pi \quad ,,$$
$$90^\circ = \frac{\pi}{2} \quad ,,$$
$$30^\circ = \frac{\pi}{6} \quad ,,$$

en $1 \text{ radiaal} = \dfrac{180^\circ}{\pi} = \text{ca } 57^\circ\ 17'\ 45''$.

-.-.-

Cyclometrische uitdrukkingen.

1). Uit de goniometrie is bekend dat $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. Daar $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ rad., kunnen we dus ook schrijven: $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (De eenheid rad resp. radialen wordt eenvoudigheidshalve gewoonlijk weggelaten).

Ook zouden we kunnen zeggen: $\frac{\pi}{6}$ is een hoek , waarvan de sinus $\frac{1}{2}$ is.

Of ook wel: $\frac{\pi}{6}$ is de boog, waarvan de middelpuntshoek 'n $\frac{1}{2}$ tot sinus heeft.

2). Evenzo: $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ radialen $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Wij kunnen dus zeggen: $\frac{\pi}{4}$ is een hoek, waarvan de cosinus $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ is.

Of ook: $\frac{\pi}{4}$ is de boog , waarvan de middelpuntshoek $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ tot cosinus heeft.

3) Evenzo: $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ radialen $\mathrm{tg}\, \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

Wij kunnen dus zeggen: $\frac{\pi}{3}$ is een hoek , waarvan de tangens $\sqrt{3}$ is.

Of ook: $\frac{\pi}{3}$ is de boog , waarvan de middelpuntshoek $\sqrt{3}$ tot tangens heeft.

Deze uitdrukkingen worden afgekort tot

1). $\frac{\pi}{6} = \mathrm{bg}\,\sin \frac{1}{2} = \mathrm{bg}\,\cos \frac{1}{2}\sqrt{3} = \mathrm{bg}\,\mathrm{tg}\, \frac{1}{3}\sqrt{3}$

2). $\frac{\pi}{4} = \mathrm{bg}\,\cos \frac{1}{2}\sqrt{2} = \mathrm{bg}\,\sin \frac{1}{2}\sqrt{2} = \mathrm{bg}\,\mathrm{tg}\, 1$

3). $\frac{\pi}{3} = \mathrm{bg}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{3} = \mathrm{bg}\,\sin \frac{1}{2}\sqrt{3} = \mathrm{bg}\,\cos \frac{1}{2}$.

Soms gebruiken we voor de afkorting bg ook wel de afkorting arc , bijv. $\alpha = \mathrm{arc}\,\sin \frac{1}{2}$. De afkorting arc komt van het latijnse woord arcus , dat boog betekent.

-.-.-